Материалы 11-й Российской Конференции по холодной трансмутации ядер химических элементов и шаровой молнии. М.:НИЦ ФТП «Эрзион», 2004. с. 161–168.

О ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ИНВАРИАНТНОСТЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Ж. Лошак*, Д.В. Филиппов**

*Фонд им.Луи де Бройля, Париж, Франция.

**ГНУП РЭКОМ, РНЦ «Курчатовский институт», Москва, РФ.

Гипотеза существования свободных магнитных зарядов – изолированных северных или южных магнитных полюсов – была ясно высказана Пьером Кюри в 1894 на основе известных законов симметрии [1]. Именно он первый понял, что, в противоположность скалярному электрическому заряду, магнитный заряд должен быть киральным, то есть северный и южный магнитные заряды являются отражениями друг друга в зеркале.

При попытке описания магнитных зарядов мы сталкиваемся с двумя основными трудностями:

1. **Сингулярность.** При описании взаимодействия электрического и магнитного заряда возникает сложность в определении потенциалов полей. Если пользоваться классическими Лоренцевыми потенциалами $A_\mu = \{\vec{A},\ i\varphi\}$:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \tag{1}$$

то такой потенциал становится ***сингулярным*** на некоторой линии, начинающейся на магнитном заряде (произвольность выбора сингулярной линии определяется условием лоренцевой калибровки) так как на магнитном заряде $\operatorname{div}H = 4\pi\cdot\rho_m \neq 0$. При использовании магнитного псевдопотенциала $iB_\mu = \{\vec{B},\ i\chi\}$:

$$\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{B} \qquad \vec{H} = \nabla\chi + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

сингулярности возникают на электрических зарядах.

2. **Киральность.** Каким образом описывать киральный (псевдоскалярный) объект – магнитный заряд? Это является некоторой экзотикой, так как мы привыкли к работе со скалярными величинами. Хотелось бы подчеркнуть, что киральность магнитного поля следует из опыта, а киральность магнитного заряда следует из следующих рассуждений П.Кюри:

- Если какое-либо явление обладает некоторой симметрией, то эта симметрия содержится в причинах данного явления.
- Если магнитные заряды существуют, то они являются источниками (причиной) магнитного поля.
- Следовательно магнитные заряды должны обладать киральной симметрией, то есть менять знак при пространственной инверсии.

Первую из указанных трудностей удалось разрешить Дираку в 1931 г. [2]. Именно при разрешении проблемы сингулярности и появилось условие квантования магнитного заряда:

$$g_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar c}{e} = \frac{e}{2 \cdot \alpha} = 68.5 \cdot e \tag{3}$$

α=1/137 – постоянная тонкой структуры.

Однако теория магнитного монополя Дирака [1] обладает двумя существенными недостатками:

1. Не решен вопрос о киральности магнитного заряда, что потребовало от теории корректировки понятия пространственной инверсии.
2. Размер монополя (необоснованно) принят равным классическому радиусу электрона, что при условии (3) для минимального магнитного заряда приводит к очень большим энергиям покоя такого заряда. Мы считаем, что это ошибка, которая привела к неправильной постановке экспериментов по поиску магнитных зарядов.

Правила симметрии электромагнитного поля

Опишем правила преобразования векторов напряженности электрического и магнитного поля, а так же электрического и магнитного заряда при пространственной инверсии (P) и обращении времени (T).

Пользуясь известными классическими выражениями для силы Лоренца, действующей на электрический и на магнитный заряд:

$$F_e = e \cdot \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{H} \right), \qquad \vec{F}_m = g \cdot \left(\vec{H} - \frac{1}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{E} \right) \tag{4}$$

несложно проверить правила преобразования при P – инверсии пространства, T – обращении времени и C – классическом зарядовом сопряжении (заряды меняют знак, а падающие на частицу поля не меняются). В табл.1 собраны правила преобразования для полей, потенциалов и зарядов («+» сохранение знака, «–» обращение знака).

	x	t	F	v	E	H	e	g	A	φ	B	χ
P	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-
T	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+
C	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	+	+

Табл.1. Правила симметрии электромагнитного поля при PTC-преобразованиях.

Так как классическая теория является предельным случаем квантовой, указанные в табл.1 правила симметрии должны соблюдаться и в квантовом приближении.

Уравнение Дирака

Уравнение Дирака описывает движение релятивистской заряженной частицы со спином ½ во внешнем поле. В координатах {x, y, z, ict} в общем случае уравнение Дирака для 4-х разрядных спиноров ψ записывается в виде:

$$\gamma_\mu \nabla_\mu \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0 , \tag{5}$$

где γ_μ – четырехразрядные матрицы Дирака:

$$\gamma_k = i\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

выраженные через матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\sigma_i\cdot\sigma_k = i\cdot e_{ikl}\cdot\sigma_l$$

Для четырехразрядных матриц можно составить 16-мерную ортонормированный базис; например – базу Клиффорда, которая включает матрицы Дирака:

$$\Gamma_N = \{\, I\,,\ \gamma_\mu\ ;\ i\gamma_\mu\gamma_\nu\ ;\ i\gamma_\mu\gamma_5\ ;\ \gamma_5\,\} \tag{8}$$

Калибровочная инвариантность [3 – 5]

Рассмотрим калибровочную инвариантность уравнения Дирака (5) в наиболее общем для четырехразрядных матриц виде:

$$\psi \to \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\cdot\Gamma\cdot\varphi \right)\cdot\psi \tag{9}$$

где Г – некоторая четырехразрядная матрица, которую можно представить в виде разложения по элементам базы Клиффорда:

$$\Gamma = \sum_{N=1}^{16} a_N\cdot\Gamma_N\ .$$

Взятие экспоненты от матрицы можно *определить* через разложение в ряд:

$$\exp(\,\Gamma\,) \equiv \sum_n \frac{(\,\Gamma\,)^n}{n!} \tag{10}$$

Так как любой элемент базы Клиффорда (8) при возведении в четную степень дает единичную матрицу, то для экспоненты от матрицы из базы Клиффорда по определению (10):

$$\exp(i\cdot\Gamma_N\cdot\theta) \equiv \cos(\,\theta\,) + i\cdot\Gamma_N\cdot\sin(\,\theta\,)$$

Для калибровочного преобразования (9) определяем оператор:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - i\frac{e}{\hbar c}\cdot\Gamma\cdot A_\mu \tag{11}$$

в котором одновременно с калибровочным преобразованием спиноров (9) потенциал A_μ преобразуется по закону:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varphi. \tag{12}$$

Несложно убедиться, что уравнение Дирака только в том случае инвариантно по отношению к калибровочному преобразованию (9, 12), когда калибровочная матрица Г одинаково коммутирует со всеми четырьмя матрицами γ_μ.

Несложно проверить, что для всех γ_μ и Γ_N справедливо правило:

$$\gamma_\mu \Gamma_N \gamma_\mu = \pm \Gamma_N \,, \tag{13}$$

причем знак зависит от номеров матриц.

С ***одинаковым*** для всех γ_μ знаком коммутируют ***две и только две*** матрицы из базы Клиффорда:

1. $\Gamma_1 = I$ – единичная, коммутирует со знаком «+» в (13), и
2. $\Gamma_{16} = \gamma_5$ – коммутирует со знаком «–» в (13).

Эти две матрицы определяют две (и только две) фазовые калибровки уравнения Дирака:

1. Уравнение Дирака для электрона:

$$\gamma_\mu \left(\partial_\mu - i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0 \tag{14}$$

2. Новое уравнение (Ж.Лошак):

$$\gamma_\mu \nabla_\mu \psi \equiv \gamma_\mu \left(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu \right) \psi = 0 \tag{15}$$

в котором заряд является не скаляром, а оператором $\mathbf{G} = g\gamma_5$.

Уравнение (15) можно трактовать как уравнение, описывающее именно магнитный заряд, так как его решение удовлетворяет правилам симметрии Кюри для магнитного заряда (табл.1). Линейный массовый член в (15) отсутствует, так как он не соответствует калибровочному преобразованию с матрицей γ_5.

Уравнение (15) разделяется на два независимых уравнения в известном представлении Вейля, которое используется для описания нейтрино:

$$\begin{gathered} \psi \to U\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_4 + \gamma_5) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{16}$$

Это представление диагонализирует матрицу заряда G:

$$UGU^{-1} = gU\gamma_5 U^{-1} = g\gamma_4 = g \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{17}$$

с собственными значениями g и –g. Из (15) получем:

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\vec{\sigma}\cdot\nabla-i\frac{g}{\hbar c}(\chi+\vec{\sigma}\vec{B})\right]\xi=0,$$
$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\sigma}\cdot\nabla+i\frac{g}{\hbar c}(\chi-\vec{\sigma}\vec{B})\right]\eta=0. \quad (18)$$

В этих уравнениях сохраняются два киральных тока:

$$X_\mu=\left\{-\xi^+\vec{\sigma}\xi,\ i\xi^+\xi\right\},\qquad Y_\mu=\left\{\eta^+\vec{\sigma}\eta,\ i\eta^+\eta\right\}.$$

При зарядовом сопряжении и пространственной инверсии скаляр g не меняет знак, но компоненты ξ и η, соответствующие собственным значениям противоположного знака, обмениваются друг с другом:

$$\begin{aligned}&P: && \xi\leftrightarrow\eta; && \\ &C: && \xi\to -i\,\sigma_2\,\eta^*; && \eta\to -i\,\sigma_2\,\xi^*; \\ &T: && \xi\to\sigma_2\,\xi^*; && \eta\to\sigma_2\,\eta^*;\end{aligned}$$

что и соответствует классическим правилам (табл.1).

Фактически киральность магнитного заряда заключается не в смене знака магнитного заряда при пространственной инверсии, а в переходе к другому собственному решению, соответствующее собственному значению другого знака матрицы G (17).

Классический предел

Для перехода к классическому пределу геометрической оптики определяем $\xi=\xi_0\cdot\exp(iS/\hbar)$ и из (18) в нулевом приближении по h получаем однородную систему уравнений для ξ_0

$$\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t}-g\chi\right)-\left(\nabla S+\frac{g}{c}\vec{B}\right)\vec{\sigma}\right]\xi_0=0, \quad (19)$$

которая имеет нетривиальное решение при

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}-g\chi\right)^2-\left(\nabla S+\frac{g}{c}\vec{B}\right)^2=0. \quad (20)$$

Последнее описывает классическое движение частицы с гамильтонианом

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H,\qquad \vec{p}=\nabla S$$
$$H=c\sqrt{\left(\vec{p}+\frac{g}{c}\vec{B}\right)^2}-g\cdot\chi, \quad (21)$$

удовлетворяющее уравнениям движения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=g\left(\nabla\chi+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\frac{g}{c}\vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{B}=g\left(\vec{H}-\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{E}\right). \quad (22)$$

Мы получили, что в классическом пределе уравнение (15) приводит к уравнениям движения, совпадающими с силой Лоренца, действующий на магнитный заряд (4).

Рассмотрев квантовую задачу взаимодействия монополя с электрическим зарядом, Ж.Лошак показал [5], что ось симметрии двух зарядов описывает конус вокруг сохраняющегося полного момента количества движения. При этом, если m – проекция момента количества движения на ось симметрии волчка, то электрический и магнитный заряды связаны соотношением:

$$\frac{eg}{\hbar c} = m, \tag{23}$$

где

$$m = \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2} \ldots J = \frac{2n+1}{2} \quad \text{или}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ J = n.$$

В последнем случае при m=0 уравнение Дирака описывает нейтрино, что приводит к гипотезе о монополе как магнито-возбужденном состоянии нейтрино.

Уравнение для поля

Если записать простейший инвариантный по отношению к указанной калибровке (9, 12) лагранжиан:

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\hbar}{2} \cdot (\overline{\psi}\gamma_\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \overline{\psi}\gamma_\mu \psi) \tag{24}$$

где $\overline{\psi} = \psi^+ \gamma_4$ – Дираковское сопряжение,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

∇ – ковариантная производная

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{g}{\hbar c} \cdot \gamma_5 \cdot B_\mu,$$

то из принципа наименьшего действия для лагранжиана (24) получаются уравнения Максвелла для поля:

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = i\frac{4\pi}{c} K_\mu \tag{25}$$

порождаемого магнитным током:

$$K_\mu = g \cdot i\overline{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \psi.$$

Этот ток удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu K_\mu = 0.$$

Уравнение (25) при переходе к псевдовекторному потенциалу поля B_μ дает уравнение Даламбера:

$$\Box B_\mu = -i(4\pi/c)K_\mu.$$

Конечно, остается важный вопрос о том, являются ли рассмотренные поля теми же электромагнитными полями, которые взаимодействуют с электрическими зарядами? На этот вопрос ответить сможет только эксперимент. Но на сегодняшний день такое предположение не противоречит традиционной физике.

Заключение

Магнитный заряд, введенный Лошаком является лептоном, т.е. участником электрослабых взаимодействий. Так как указанное уравнение монополя при нулевом магнитном заряде g совпадает с уравнением нейтрино, магнитный монополь Лошака может быть трактован как магнитно-возбужденное состояние нейтрино.

Заметим, что размеры монополя жестко не ограничены. При размерах порядка боровского радиуса энергия магнитного поля монополя, обладающего элементарным зарядом, будет составлять ~100 кэв.

Такой монополь является безмассовым (или почти безмассовым), т.е. очень легким (с энергетической точки зрения) и может быть рожден при электромагнитных явлениях [5, 6]. Заметим, что в [5] указаны основания для гипотетического предположения о существовании монополя:

- наблюдение «странных» треков, которые не удается объяснить никаким известным излучением;
- наблюдение треков на расстоянии 2-х метров от установки (что говорит о том, что они не могут принадлежать электрически заряженным частицам);
- изменение магнитного поля на ядрах в эффекте Мессбаура, причем изменения разных знаков в зависимости от положения образца, по отношению к внешнему магнитному полю;
- зависимость формы треков от приложенного магнитного поля.

Все вместе это может указывать на магнитную природу излучения.

Литература

1. P. Curie, Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, J. de Phys., 3° série, III (1894) 393.
2. Dirac. P. A. M. Proc. Roy. Soc., 1931. v. A133. p. 60. Квантованные сингулярности в электромагнитном поле. – В сб. Монополь Дирака. М.: Мир, 1970. с. 40 – 57.
3. G. Lochak, Ann. Fond. L.de Broglie, 1983. №8. p.345; Ann. Fond. L.de Broglie, 1984. №9. p.5.
4. G. Lochak. The symmetry between Electricity and Magnetism and the problem of the existence of Magnetic Monopole. in: Advanced Electromagnetism, Ed. T.W. Barrett and D.M. Grimes, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1995. p. 105 – 147.
5. Лошак. Ж. О возможности легкого, лептонного магнитного монополя, способного влиять на слабые взаимодействия. Прикладная физика, 2003. №3. с. 10 – 13.
6. Уруцкоев Л.И., Ликсонов В.И., Циноев В.Г. Экспериментальное обнаружение «странного» излучения и трансформации химических элементов. Прикладная физика, 2000. №4. с. 83 – 100.
7. Волкович А.Г., Говорун А.П., Гуляев А.А., Жуков С.В., Кузнецов В.Л., Рухадзе А.А., Steblевский А.В., Уруцкоев Л.И. Наблюдение эффектов искажения изотопного соотношения Урана и нарушения векового равновесия Тория-234 при электровзрыве., Краткие сообщения по физике ФИАН, 2002, №8, с.45–50.

Приложение

Пояснения к формуле (25)

Пользуемся векторным псевдопотенциалом магнитного поля

$$iB_\mu = \{\vec{B},\ i\chi\}$$

$$\vec{H} = \nabla\chi + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{E} = \operatorname{rot}\vec{B} \tag{a.1}$$

Уравнение (25)

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = i\frac{4\pi}{c}K_\mu \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{a.2}$$

эквивалентно

$$B_{\mu|\nu\nu} = -i\frac{4\pi}{c}K_\mu \qquad K_\mu = g\cdot i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \tag{a.3}$$

В представлении Вейля (16)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \xi+\eta \\ \xi-\eta \end{pmatrix}$$

$$\overline{\psi} = \psi^+\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \eta^+ + \xi^+ & \eta^+ - \xi^+ \end{pmatrix} \tag{a.4}$$

для вектора тока $K_\mu = \{\vec{K}, ic\cdot\rho\}$, воспользовались определениями (6) и следующими из них соотношениями:

$$\gamma_{1\div3}\cdot\gamma_5 = i\sigma_{1\div3}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_{1\div3}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4\cdot\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{a.5}$$

получаем:

$$\vec{K} = g\cdot\left(-\xi^+\vec{\sigma}\xi - \eta^+\vec{\sigma}\eta\right)$$

$$\rho = \frac{g}{c}\cdot\left(\xi^+\xi - \eta^+\eta\right) \tag{a.6}$$

Вектор магнитного тока (a.6) равен разности токов:

$$K_\mu = g\cdot\left(X_\mu - Y_\mu\right)$$

$$X_\mu = \left\{-\xi^+\vec{\sigma}\xi,\ i\xi^+\xi\right\}, \quad Y_\mu = \left\{\eta^+\vec{\sigma}\eta,\ i\eta^+\eta\right\} \tag{a.7}$$

Запишем уравнения поля (a.3) в переменных напряженностей полей. Из условия калибровки получаем:

$$B_{\mu|\mu} = -i\left(\operatorname{div}\vec{B} + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = 0 \tag{a.8}$$

из (a.1) и (a.3) получаем уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \Delta\chi + \frac{1}{c}\frac{\partial\operatorname{div}\vec{B}}{\partial t} = \Delta\chi - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = B_{4|\mu\mu} = -i\frac{4\pi}{c}K_4 = 4\pi\cdot\rho$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla\operatorname{div}\vec{B} - \Delta\vec{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} - \Delta\vec{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \left[\Delta\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\right] \Rightarrow \tag{a.9}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - iB_{n|\mu\mu} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{K}$$